הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל - הפקולטה למתמטיקה

חדו"א 2מ – 104022

מבחן סוף סמסטר מועד ב', אביב - 08/10/2018

משך הבחינה שלוש שעות.
אין להשתמש בחומר עזר או באמצעי עזר מכל סוג שהוא, כולל מחשבון.
לבחינה שני חלקים: בחלק א' שאלות רב־ברירה ("אמריקאיות") ובחלק ב' שאלות "פתוחות". עבור כל אחת מהשאלות בחלק א' יש להקיף בעיגול את התשובה היחידה הנכונה. על השאלות בחלק ב' יש לענות באופן מלא בגוף השאלון במקום המיועד לכך.
אין לפרק את השאלון ויש להחזירו בשלמותו בתום הבחינה.

בהצלחה!

חלק א'

לכל אחת מן השאלות בחלק זה יש לבחור את התשובה הנכונה היחידה מבין האפשרויות הרשומות. יש להקיף בעיגול את התשובה הנכונה. סימון לא ברור, או סימון של יותר מתשובה אחת באותה שאלה, יפסול את תשובתך. משקל כל שאלה בחלק זה הוא 7 נקודות.

1. העבודה של השדה הוקטורי $\overline{F}(x,y) = \left(7x^6 - x^2y, xy^2 - e^{\sin^2 y}\right)$ על העקום שהוא גרף הפונקציה $f(x) = -\sqrt{1-x^2}, \quad -1 \le x \le 1$ עם האוריינטציה ההולכת מ־ $(1,0)$ ל־ $(-1,0)$ היא

(א) $\frac{\pi}{4} - 2$

(ב) $-2 - \frac{\pi}{4}$

(ג) $\frac{\pi}{4} + 2$

(ד) $2 - \frac{\pi}{4}$

(ה) 0

2. נתון כי $|\overline{m}| = 3, \ |\overline{n}| = 2$ וכי הזווית בין הווקטורים $\overline{m}, \ \overline{n}$ היא $\frac{\pi}{3}$.
נגדיר $\overline{a} = \overline{m} - 2\overline{n}, \ \overline{b} = 2\overline{m} + \overline{n}$. אז השטח של המקבילית ששתיים מצלעותיה הם $\overline{a}, \overline{b}$ הוא

(א) $2\sqrt{3}$

(ב) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(ג) $\sqrt{3}$

(ד) $15\sqrt{3}$

(ה) $3\sqrt{3}$

3. תהי $f(x,y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ונניח כי פולינום טיילור מסדר שני של f ב־ $(0,0)$ הוא $T_2(x,y) = 3 + 2x + \frac{x^2}{2} - xy - y^2$. אז $(0,0)$ היא

(א) נקודת אוכף

(ב) נקודת מקסימום מקומי

(ג) נקודת מינימום מקומי

(ד) לא נקודת מינימום מקומי ולא מקסימום מקומי ולא אוכף

(ה) נקודה בה ערך הפונקציה הוא 8.

4. מטייל עומד בנקודה $(1,2,-4)$ על הר שצורתו $z = f(x,y) = 10 - 2x^2 - 3y^2$. הוא מחליט לנוע משם על ההר בדרך בה קצב שינוי הגובה הוא מקסימלי. לאיזה כיוון במרחב עליו לפנות בתחילת תנועתו?

(א) $(-4,-12,10)$

(ב) $(2,1,0)$

(ג) $(-8,-1,9)$

(ד) $(-2,-6,80)$

(ה) $(1,1,\sqrt{3})$

5. נפח הגוף

$$V = \{(x,y,z)|\ (x+y+z)^2 + (x+2y+z)^2 + (x+2y-2z)^2 \leq 1\}$$

הוא

(א) π

(ב) $\frac{4\pi}{9}$

(ג) 2π

(ד) $\frac{\pi}{4}$

(ה) שלילי

6. אורך העקום $\overline{\gamma}(t) = \big(t, \sin(t)\cos(t), \cos^2(t)\big), \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ הוא

(א) π

(ב) $\sqrt{2} \cdot \pi$

(ג) $\sqrt{3} \cdot \pi$

(ד) 2π

(ה) 4π

7. תהי $z = z(x,y)$ מוגדרת הצורה סתומה ע"י המשוואה

$$5x^2y + 2x^2yz + z^3xy = 5.$$

אזי $z''_{yy}(1,1)$ הוא

(א) 2

(ב) 5

(ג) 1

(ד) -1

(ה) -3

חלק ב'

יש לרשום בעמודים הבאים פתרון מלא ומנומק לשתי השאלות הבאות.

8. (26 נקודות)

(א) (8 נקודות)
מיצאו וסווגו את הנקודות הקריטיות של

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

(ב) (8 נקודות)
הוכיחו כי $(1,2)$ הינה נקודה קריטית של

$$f(x,y) = x^3 - y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x - 12y + 8$$

שאינה נקודת מינימום מקומי או נקודת מקסימום מקומי.

(ג) (10 נקודות)
הוכיחו כי לפונקציה $f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ יש מינימום ומקסימום (מוחלטים) בתחום

$$D = \{(x,y) |\ x^2 + y^2 \leq 1, \quad 3x \geq -y\}$$

ומיצאו את הנקודות בהם הם מתקבלים ואת הערכים בנקודות אלו.

9. (25 נקודות)

(א) (13 נקודות)
יהי

$$\overline{F}(x,y) = \frac{ax+y}{x^2+xy+y^2}\hat{i} + \frac{x+ay}{x^2+xy+y^2}\hat{j}$$

שדה ווקטורי המוגדר בתחום

$$D = \{(x,y)|\ x,y > 0\}.$$

מיצאו a עבורו השדה משמר (והסבירו למה הוא משמר עבור ערך זה), ועבור ערך זה של a, מיצאו פונקציית פוטנציאל. אין לנחש פונקציית פוטנציאל. יש להסביר איך מגיעים לפונקציית הפוטנציאל.

(ב) (12 נקודות)
יהי $\overline{F}(x,y,z)$ שדה המוגדר וגזיר ברציפות ב־ $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. השדה **אינו** מוגדר בראשית. יהי

$$S = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2 = 1\}.$$

עם האוריינטציה החיובית. הוכיחו כי

$$\iint_S (\overline{\nabla} \times \overline{F}) \cdot \hat{n} dS = 0$$